

## INTRODUCTION

Cet ouvrage présente des questions mathématiques dont personne ne devrait ignorer l'existence, et se donne le moyen d'y répondre. Étudier ces questions permet d'aborder certains problèmes de la vie quotidienne que peuvent rencontrer les jeunes élèves et leurs parents<sup>1</sup>. Étudier ces questions comme nous le proposons permet aussi de comprendre pourquoi ce type de travail doit être au cœur de toute instruction citoyenne.

Pour nous autoriser à enquêter librement sur ces questions, nous avons fait le choix de considérer que les programmes d'enseignement sont des textes régulateurs qui ouvrent un large champ de possibles (Chevallard, 1986) et qu'ils laissent aux professeurs une grande liberté. Qu'ils soient expérimentés et travaillent en équipe ou qu'ils soient novices et en formation, nous leur proposons les moyens de cette liberté c'est-à-dire l'analyse épistémologique des situations fondatrices de tout enseignement élémentaire. Ces analyses éclairent la prise de décision *a priori* et l'analyse *après-coup*. Nous proposons de même aux parents de comprendre au fond les motifs des choix que feraient ces professeurs, et d'accompagner ainsi leurs enfants dans les apprentissages qui leur seraient proposés.

Le texte s'organise en trois parties. La première partie fait un état des lieux et propose une description du problème anthropologique des nombres et de leurs usages sociaux (chap. I et II). La deuxième partie propose un état des connaissances disponibles. On y expose et discute les résultats des travaux expérimentalistes relatifs à la cognition numérique. Nous traitons en particulier du système cognitif d'estimation des grandeurs dont l'évolution nous a munis, et de l'appui que cette connaissance donne aux choix d'un premier enseignement de la mesure des grandeurs. On y présente une position sur les mathématiques à enseigner aux cycles 1 et 2 qui permet aux élèves l'accès plus rapide aux pratiques mathématiques écrites (chap. III et IV). La troisième partie, la plus importante, présente les enseignements que nous avons expérimentés pour les cycles 1 et 2. Nous y exposons et discutons les résultats de nos travaux en didactique et en particulier ce que nous a appris le dispositif d'ingénierie coopérative, la coopération personnelle avec les professeurs d'un réseau d'une centaine d'écoles et de plus de cinq cents professeurs (chap. V à VII).

---

1. On pourra suivre sur ce point les débats autour de l'école et des enjeux de l'enseignement, et comprendre comment chacun des contradicteurs propose ses propres remèdes comme des panacées, sans que personne n'aille étudier précisément ni ce qui est vraiment enseigné ni comment l'enseignement est pratiqué.

L'idée qu'il faut, dès les commencements, ouvrir aux élèves la possibilité de pratiquer des mathématiques à l'écrit, nous a guidés. Nous avons en effet observé comment *conquérir l'écriture* est, pour les élèves, s'ouvrir un monde jusqu'ici impensable, celui de l'action sur et avec les symboles. C'est pour les élèves, si l'on permet qu'ils s'y engagent à leur rythme et à la mesure de la confiance qu'ils prennent dans leurs productions, et si enfin on ne les détourne pas de la production d'écrits en centrant l'évaluation sur la propreté de leurs réalisations, une source de joie et la possibilité d'explorer des espaces de jeu nouveaux, avec *des symboles qui rendent compte précisément d'une action matérielle* : des symboles mathématiques. Nous avons d'abord engagé leurs professeurs sur ce chemin, pour qu'ils travaillent les mathématiques par eux-mêmes, en s'emparant des formalismes qui leur sont disponibles et de la possibilité d'enquêter sur les usages courants des mathématiques élémentaires. Nous avons étudié précisément ces usages avant d'encourager les professeurs à s'engager sur ce même type d'enquêtes avec leurs élèves.

Nous participons à un mouvement profond qui touche les professeurs du monde entier mis en question après la publication des analyses de Ma (1999), qui montrait comment en Chine certains types de connaissances des professeurs font leur efficacité en leur permettant d'accompagner les élèves au plus près de leur pensée, et combien ces connaissances font souvent défaut aux professeurs des États-Unis. Ouvrage remarquable de Clivaz (2014) reprend ces études dans le monde francophone pour répondre à la question de l'influence de la compréhension des mathématiques par les professeurs sur les apprentissages de leurs élèves, en particulier à propos de l'algorithme de la multiplication. Les mathématiciens se sont interrogés lorsque Shulman (2007) a montré comment les professeurs qui enseignent les mathématiques développent des connaissances qui ne sont pas décrites dans les textes mathématiques écrits par les mathématiciens. Nous rendons compte ici de ces mêmes phénomènes, tels que nous les avons vécus avec les professeurs qui ont accepté bien audacieusement d'entrer avec nous, chercheurs, dans une coopération de longue durée.

Nous avons appris avec ces professeurs comment ce que les théories didactiques affirment *en principe* était vrai *en pratique*. Nous avons compris que les professeurs travaillant en coopération entre eux pouvaient nous donner à voir cela, si nous renoncions à leur enseigner nos théories pour collaborer au travail qu'ils conduisent. Ils sont tous cités dans les remerciements. Ils n'ont pas écrit cet ouvrage : ce n'est pas leur métier ; mais ils en ont vécu et mis en œuvre personnellement la plupart des situations ici présentées, et même si nous tentons de montrer une partie de leurs connaissances, leur compréhension pratique va souvent au-delà de ce que nous avons pu exprimer, parce qu'elle outille leurs décisions de chaque jour.